Décomposition Polaire | Leçons : 106, ~~148, 1~~ 154, 158

~~Serre~~ | H^2G^2, Caldero |

Thm : $\varphi : \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{cases}$ est un homéomorphisme

Preuve :

$\boxed{\text{Surjectivité}}$ Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, On a ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ on peut diagonaliser par une matrice ~~unitaire~~ orthogonale. Donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tMM = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^tP \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$$

Donc on pose $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

On pose $S = PD\,{}^tP$

On a $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et ${}^tS = S$

et $S^2 = {}^tMM$. On pose $O = MS^{-1}$ donc $M = OS$

De plus ${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = I_n \Rightarrow O \in O_n(\mathbb{R})$

D'où $\underbrace{M}_{\in GL_n(\mathbb{R})} = \underbrace{O}_{\in O_n(\mathbb{R})}\underbrace{S}_{\in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{Injectivité}}$

Si $M = OS = O'S'$, $O, O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Alors $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'S' = S'^2$

Soit Q tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (donné par exemple par les interpolat° de Lagrange)

On a donc $S = PD\,{}^tP = PQ(D^2)\,{}^tP = Q(PD^2\,{}^tP) = Q({}^tMM) = Q(S^2) = Q(S'^2)$

Or S' commute avec tout polynôme en S' donc commute avec S

Donc S et S' sont codiagonalisables. Donc $\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$P_0S'P_0^{-1}$ et $P_0SP_0^{-1}$ sont diagonales. Mais alors $S^2 = S'^2$. Donc $P_0S^2P_0^{-1} = P_0S'^2P_0^{-1}$

et $S = S'$ car leur valeur propre sont dans $\mathbb{R}_+^*$

Donc $S = S'$ d'où $O = O'$ d'où l'injectivité.

Continuité : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $M_p \to M$, $M_p \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$ décomposition polaire

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists O_p \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_p \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M_p = O_p S_p$

Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc il existe une suite extraite $(O_{\varphi(p)})$ qui converge vers $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$

$S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} M_{\varphi(p)}$ converge donc vers $\bar{O}^{-1} M = \bar{S}$

$\bar{S} = \bar{O}^{-1} M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$

donc $M = \bar{O}\bar{S}$ avec $\bar{O} \in O_n(\mathbb{R})$, $\bar{S} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Par l'unicité de la décomposition polaire, $\bar{O} = O$ et $\bar{S} = S$

Donc (O_p) n'a qu'une valeur d'adhérence et est dans $O_n(\mathbb{R})$, compact.

Donc $\lim_{p\to\infty} O_p = O$ et $\lim_{p\to\infty} S_p = S$ et donc φ^{-1} est continue

H^2G^2, Caldero

COMPLÉMENT

- Continuité de φ par continuité du produit matriciel. Prendre une suite de matrices et montrer la convergence pour une certaine norme (somme des coefs par exemple)

- Polynômes de Lagrange : Associe n points du plan à un polynôme de degré $n-1$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $GL_n(\mathbb{R})$ car fermé, borné

  En effet - $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\})$ par continuité de ϕ d'où fermé, où $\phi : M \mapsto {}^tMM$

  - $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, C_j ses colonnes ${}^tC_jC_j = \|C_j\|^2 = 1$

    D'où $\|A\|_2^2 = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\|^2 = n$

    D'où borné

- $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$ (raisonner par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$).